Tentamen Complexe Analyse
03/11/08, 08.30–11.30 uur

1. Definieer voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $e^z \neq 1$ de functie
$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$
   (a) Toon aan dat $f(z)$ slechts polen bezit in $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bepaal de orde van deze polen en hun residu. Wat valt er te zeggen over $z = 0$?
   (b) Laat zien dat $f(z)$ samenvalt met een machtreeks om $z = 0$ en bepaal van deze machtreeks de convergentiestraal (zonder die machtreeks expliciet te maken).

2. Definieer de functie $f(z) = (z+1)\,e^{-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Toon aan dat de functie $|f(z)|$ een maximum bezit als $|z| \leq 1$ en bepaal dit maximum. Beargumenteer het gevonden resultaat.

3. Bereken met behulp van residuenrekening de integraal
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin\theta}\, d\theta.$$
Geef duidelijk aan van welke substituties gebruik gemaakt wordt.

4. Bereken met behulp van residuenrekening de integraal
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\, dx, \quad a > 0.$$
Beargumenteer de keuze van de gebruikte contourintegraal.

5. Definieer de 2π-periodieke reële functie $F(t)$ door
$$F(t) = 0, \quad -\pi < t \leq 0; \quad F(t) = \pi, \quad 0 < t \leq \pi.$$
   (a) Bepaal de bijbehorende complexe Fourier-coëfficiënten
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
   (b) Wat levert de gelijkheid van Parseval op?
   (c) Bepaal voor iedere $t \in [-\pi, \pi]$ de som van de reeks
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$
   Beargumenteer het resultaat.
   (d) Schrijf de complexe Fourierreeks in reële vorm met behulp van sinus en cosinus functies.